مدل‌سازی عددی ویسکوالاستیسیته‌ی خطی در نرم‌افزار روش اجزای محدود برای استفاده در مدل‌سازی فیزیک‌های چندگانه*

(یادداشت پژوهشی)

مجتبی حقیقی یزدی[۱]　　　　جعفر اسکندری جم[۲]

چکیده در این مقاله، قابلیت ایجاد یک مدل ویسکوالاستیک خطی در یک نرم‌افزار روش اجزای محدود (COMSOL Multiphysics) مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکم بر رفتار ویسکوالاستیسیته خطی برای حالت‌های تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای ارائه شده است. درستی این معادلات و نحوه‌ی کاربرد آن‌ها در قالب یک مثال مهندسی مورد بررسی و تأیید قرار گرفته‌اند. از آن‌جایی که معادلات ارائه شده قابل استفاده در مدل‌سازی فیزیک‌های چندگانه می‌باشد، می‌توان از مدل ارائه شده در مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی به‌صورت کوپل شده با فیزیک‌های دیگر نیز استفاده کرد.

واژه‌های کلیدی روش عددی، مدل‌سازی اجزای محدود، ویسکوالاستیک خطی، مدل رئولوژیک، فیزیک‌های چندگانه.

Numerical Modeling of Linear Viscoelasticity in a Finite Element Method Software Package to be used for Modeling of Multiphysics

M. Haghighi-Yazdi　　　　J. Eskandari Jam

Abstract *In this paper, the capabilities of modeling linear viscoelasticty in a finite element method software package (COMSOL Multiphysics) are investigated. The governing equations of linear viscoelasticity have been developed for 2D cases of plane stress and plane strain. These equations have been verified by solving a related engineering example. Since the developed equations are suitable for modeling of multiphysics mechanisms, the presented model can also be used for modeling of the linear viscoleasticity coupled with other multiphysics phenomena.*

Key Words Numerical Method, Finite Element Modeling, Linear Viscoelasticity, Rheological Model, Multiphysics.

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۲/۵/۲۵ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۸/۱۱ می‌باشد.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول: استادیار، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران.

(۲) استاد، پژوهشکده‌ی کامپوزیت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران.

مقدمه

رفتار ویسکوالاستیک مواد به‌دلیل کاربرد فراوانی که در صنایع مختلف داراست، موضوع پژوهش بسیاری از محققان قرار گرفته است. در میان این گونه مواد، پلیمرهای شیشه‌ای نمونه‌ی بارز و آشنایی هستند که دارای رفتار ویسکوالاستیک می‌باشند؛ به‌عبارتی رفتار وابسته به زمان و دما از خود نشان می‌دهند. معمولاً مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی در این نوع مواد با استفاده از مدل‌های ویسکوالاستیک که معروف به مدل‌های رئولوژیک می‌باشند، انجام می‌پذیرد. این مدل‌ها عموماً از تعدادی فنر خطی و سیلندر-پیستون تشکیل شده‌اند که به‌صورت موازی و یا سری به‌هم متصل می‌شوند. در بین مدل‌های موجود، دو مدل بسیار معروف به نام مدل‌های ماکسول و کلوین-وویت می‌باشد. این مدل‌ها در نرم‌افزارهای اجزای محدودی هم‌چون آباکوس (ABAQUS) برای مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک به‌کار گرفته می‌شوند (به‌عنوان مثال [1]).

در نرم‌افزاری مانند نرم‌افزار کامسول (COMSOL Multiphysics) [2] نیز مطالعاتی در زمینه‌ی مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک مواد صورت گرفته است. به‌عنوان مثال، موراوک و لتزلتر [3] به مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی در مواد بیولوژیکی پرداخته‌اند. ایشان با استفاده از نرم‌افزار کامسول توانستند مدل ویسکوالاستیک را برای آزمایش‌های خزش و رها شدن تنش ایجاد کنند و درستی آن را مورد تأیید قرار دهند. هم‌چنین مارووالووا [4] از قابلیت نرم‌افزار کامسول در مدل‌سازی تنش ویسکوالاستیک یک نوع لاستیک در کرنش‌های بزرگ بهره برد. با وجود این، با توجه به مدل‌های رئولوژیک مختلف موجود برای مشخصه‌سازی رفتار ویسکوالاستیک مواد (مانند مدل تعمیم یافته‌ی کلوین-وویت و ماکسول)، هنوز مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک مواد در این نرم‌افزار به‌طور کامل توسعه نیافته‌اند. از آن‌جایی که در این نرم‌افزار امکان مدل‌سازی مدل‌های مکانیکی و به‌خصوص فیزیک‌های کوپل شده به راحتی فراهم است، لازم است تا مدل ویسکوالاستیک خطی موجود در این نرم‌افزار نیز توسعه‌ی بیشتری یابد تا قابلیت مدل‌سازی فیزیک‌های چندگانه شامل پدیده‌های رفتاری ویسکوالاستیک فراهم گردد.

به همین منظور قابلیت مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی در یک پلیمر شیشه‌ای با استفاده از مدل‌های تعمیم‌یافته‌ی ماکسول و کلوین-وویت در این پژوهش توسعه یافته است. مدل‌سازی توسط ماژول معادله‌ی دیفرانسیل جزیی (PDE) در نرم‌افزار کامسول ایجاد شده است و بنابراین می‌تواند به راحتی به مسایلی که در آن‌ها مکانیک سازه‌ای با دیگر فیزیک‌ها کوپل می‌باشد، تعمیم داده شود. یک نمونه از این گونه فیزیک‌های کوپل شده پدیده‌ی انتقال گاز درون لوله‌های پلیمری است، که در آن فیزیک‌های سه‌گانه‌ی مکانیک سازه‌ای، نفوذ جرم و رسانش حرارتی دخیل هستند [8-5]. در این پژوهش قابلیت مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی در نرم‌افزار اجزای محدود کامسول با استفاده از مدل‌های رئولوژیک تعمیم‌یافته‌ی ماکسول و کلوین- وویت افزایش داده شده است. این قابلیت در قالب حل مثالی نیز به نمایش در آمده است.

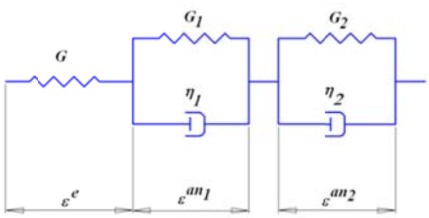
مدل‌های رئولوژیک تعمیم یافته‌ی ماکسول و کلوین- وویت هم‌چنین می‌توانند برای مشخصه‌سازی مدول (modulus) و نرمی (compliance) یک ماده‌ی پلیمری در آزمایش‌ها خزش و رها شدن تنش مورد استفاده قرار گیرند. اما مدولی که از مدل ماکسول حاصل می‌شود به‌طور مستقیم قابل تبدیل به نرمی در مدل کلوین- وویت نمی‌باشد. این عبارت برای عکس این حالت نیز صادق است. به‌عبارتی نرمی حاصل از آزمایش‌ها مستقیماً قابل تبدیل به مدول نمی‌باشد. از آن‌جایی که در برخی از مطالعات لازم است که چنین تبدیلی بین پارامترهای مدول و نرمی انجام شود،

محققانی [9] در این زمینه روش‌های گوناگونی مانند روش‌های عددی ارائه نموده‌اند. اما در این پژوهش نشان داده شده است که با ایجاد یک مدل اجزای محدود می‌توان یکی از پارامترهای مدول یا نرمی را در صورت داشتن پارامتر دیگر پیش‌بینی نمود.

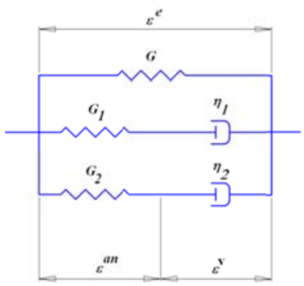
در ادامه‌ی این مقاله، بخشی جهت معرفی تئوری مورد استفاده در مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی و روابط حاکم مربوطه ارائه می‌گردد. سپس با استفاده از نرم‌افزار کامسول مثالی برای نشان دادن قابلیت استفاده از این مدل‌های رئولوژیکی برای تحلیل رفتار ویسکوالاستیک خطی مواد مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه نحوه‌ی تبدیل بین پارامترهای مدول و نرمی ارائه می‌شود. در نهایت، در بخش پایانی مقاله که مربوط به نتایج می‌باشد، نتایج حاصل از تحلیل عددی مثال مذکور و هم‌چنین تبدیل بین مدول و نرمی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تئوری و معادلات حاکم

رفتار ویسکوالاستیک در موادی مانند مواد پلیمری می‌تواند توسط دو مدل رئولوژیکی معروف تحت نام‌های مدل کلوین- وویت و مدل ماکسول مدل شود. این مدل‌های اولیه هرچند در مطالعه‌ی رفتارشناسی مواد ویسکوالاستیک مفید می‌باشند، اما پدیده‌های مکانیکی‌ای مانند خزش و رها شدن تنش را به‌طور کاملاً صحیحی نمی‌توانند مدل نمایند. از این رو، به‌منظور رفع این نقیصه با استفاده از این دو مدل ساده مدل‌های دیگری ارائه شده‌اند که عمدتاً شامل ترکیبی از این مدل‌های اولیه با تعدای فنر و سیلندر- پیستون به‌صورت موازی و یا سری می‌باشند. دو مدل معروف با نام‌های مدل تعمیم یافته‌ی کلوین- وویت (شکل ۱) و مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول (شکل ۲) از این دسته مدل‌های رئولوژیک می‌باشند. در مدل تعمیم یافته‌ی کلوین- وویت، دو المان اولیه مدل کلوین- وویت با یک فنر الاستیک خطی به‌صورت سری به‌هم متصل می‌شوند. در مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول نیز دو المان اولیه‌ی مدل ماکسول با یک فنر الاستیک خطی متصل می‌گردد. در هر کدام از این مدل‌های تعمیم یافته بسته به رفتار ویسکوالاستیک ماده مورد نظر می‌توان تعداد المان‌های اولیه کلوین- وویت و ماکسول را افزایش داد.



شکل ۱ نمایش نمادین مدل تعمیم یافته کلوین- وویت



شکل ۲ نمایش نمادین مدل تعمیم یافته ماکسول

در پژوهش حاضر، همان گونه که از شکل‌های (۲ و ۱) بر می‌آید، دو المان اولیه‌ی کلوین- وویت و ماکسول به‌ترتیب برای ایجاد مدل‌های تعمیم یافته‌ی کلوین- وویت و ماکسول استفاده شده است. این انتخاب به‌دلیل بهتر مدل نمودن رفتار ویسکوالاستیک ماده‌ی پلیمری مورد استفاده در مثال مهندسی این پژوهش است.

برای استخراج معادلات حاکم توسط مدل‌های تعمیم یافته‌ی کلوین- وویت و ماکسول فرض می‌شود که تنش کلی‌ای برابر با σ به مدل اعمال شده و باعث ایجاد کرنش کلی ε در آن می‌شود. اعمال این تنش

باعث ایجاد تنش‌ها و کرنش‌هایی در فنرها و دمپرهای موجود در این دو مدل بنا به خصوصیات رفتاری هر کدام از آن‌ها می‌شود. خصوصیات فنرها و دمپرها و هم‌چنین کرنش‌های مربوط در شکل‌های (۲ و ۱) نیز نمایش داده شده‌اند. این کرنش‌ها به کرنش الاستیک (ε^e)، کرنش غیر الاستیک (ε^{an}) و کرنش ویسکوالاستیک (ε^v) تقسیم می‌شوند. تنش‌ها و کرنش‌های ایجاد شده در این دو مدل مطابق روابط زیر به‌هم مربوط می‌شوند:

مدل تعمیم یافته‌ی کلوین- وویت:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{an_1} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{an_2} \quad (۱)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{an_1} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{v_1} \quad (۲)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{an_2} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{v_2} \quad (۳)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^e = \underline{\underline{\sigma}}^{an_1} + \underline{\underline{\sigma}}^{v_1} = \underline{\underline{\sigma}}^{an_2} + \underline{\underline{\sigma}}^{v_2} \quad (٤)$$

مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\varepsilon}}^{an_1} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{v_1} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{an_2} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{v_2} \quad (٥)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^e + \underline{\underline{\sigma}}^{an_1} + \underline{\underline{\sigma}}^{an_2} \quad (٦)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{an_1} = \underline{\underline{\sigma}}^{v_1} \quad (٧)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{an_2} = \underline{\underline{\sigma}}^{v_2} \quad (٨)$$

معادلات حاکم برای یک ماده‌ی ویسکوالاستیک که از دو مدل تعمیم یافته‌ی کلوین- وویت و ماکسول تبعیت می‌کنند، می‌توانند در حالت صفحه‌ای برای دو وضعیت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای نوشته شوند. این معادلات که می‌توانند در مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی یک ماده مورد استفاده قرار گیرند، در پیوست الف ارائه شده‌اند.

معرفی نرم‌افزار کامسول

در این پژوهش از نرم‌افزار کامسول برای مدل‌سازی مسأله‌ی مورد نظر استفاده شده است. لذا پیش از طرح مسأله، به معرفی مختصر این نرم‌افزار و چگونگی استفاده از آن پرداخته می‌شود.

نرم‌افزار کامسول نرم‌افزار قدرتمندی است که براساس زبان برنامه‌نویسی متلب (MATLAB) بنا شده است. این نرم‌افزار که از ابتدا با نام فملب (FEMLAB) معرفی شد [10]، در سال ۱۹۹۸ ایجاد شد و در سال ۲۰۰۵ به‌صورت کنونی‌اش درآمد. این نرم‌افزار که به‌عنوان وسیله‌ای محاسباتی برای معالات دیفرانسیل جزیی عمل می‌کند، امکان تغییرات معادلات را فراهم می‌سازد. قابلیت مدل‌سازی فیزیک‌های چندگانه‌ی نرم‌افزار می‌تواند با در برگرفتن مسائل پیچیده نیز گسترش داده شود. هم‌چنین نرم‌افزار، کدهای ام-فایل (m-file) مربوط به نرم‌افزار متلب را نیز تولید می‌نماید که خود موجب آسان‌تر شدن برنامه‌نویسی می‌گردد. نرم‌افزار کامسول از روش اجزای محدود به‌عنوان ابزاری برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی استفاده می‌کند. در واقع این معادلات را به مجموعه‌ای از ماتریس سفتی و بردار بارگذاری تعریف شده در روش اجزای محدود تبدیل می‌کند و سپس معادلات را در محدوده‌ی زیر دامنه‌های کوچکتر یا همان المان‌های محدود، حل می‌نماید. از لحاظ ریاضی نرم‌افزار کامسول با استفاده از مفاهیم اجزای محدود، یک معادله‌ی دیفرانسیل جزیی را به شکل ضعیف آن تبدیل می‌سازد که در آن توابع پایه‌ای لاگرانژ (یا توابع شکل) برای نمایندگی متغیرهای میدان

به‌صورت ناپیوسته بر روی دامنه مورد استفاده قرار می‌گیرند. سپس از این گونه توابع ناپیوسته انتگرال‌گیری می‌شود تا به جواب مسأله ختم شود [11].

ماژول معادلات دیفرانسیل جزیی. نرم‌افزار کامسول، ماژول‌های متفاوتی برای مدل کردن فیزیک‌هایی مانند مکانیک سازه‌ای، انتقال حرارت، نفوذ جرم و غیره دارد. یکی از این ماژول‌ها، ماژول معادلات دیفرانسیل جزیی است که در جهت مدل‌سازی براساس معادلات استفاده می‌شود. به‌کار بردن ماژول معادلات دیفرانسیل جزیی در نرم‌افزار، مدل‌سازی دستگاه پیچیده‌ای از معادلات دیفرانسیل جزیی را آسان‌تر می‌سازد و این به‌دلیل مزیت‌های متعددی است که نرم‌افزار دارد؛ از قبیل در دسترس بودن منبع کد نرم‌افزار، آسانی اصلاح آن و عدم نیاز به نوشتن کد برای تعریف المان جدید توسط کاربر (UEL). ماژول معادلات دیفرانسیل جزیی در این نرم‌افزار، سه فرم از معادلات دیفرانسیل جزیی را در اختیار کاربران قرار می‌دهد: فرم ضریبی (coefficient form)، فرم عمومی (general form)، و فرم ضعیف [12]. از آن‌جایی که در این مقاله از فرم‌های ضریبی و عمومی استفاده شده است، این دو فرم در مسأله‌ی مورد نظر در این مقاله به اختصار در زیر معرفی می‌شوند:

فرم ضریبی PDE

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla.\left(-c\nabla u - \alpha u + \gamma\right) + au + \beta.\nabla u = f \qquad (۹)$$

که در آن u متغیر مستقل روی دامنه‌ی محاسباتی که با Ω در نرم‌افزار کامسول نمایش داده می‌شود، می‌باشد.

فرم عمومی PDE

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla.\Gamma = F \qquad (۱۰)$$

که در آن Γ و F توابع متغیر وابسته به u و مشتقات مکانی آن بر روی دامنه‌ی محاسباتی Ω می‌باشند.

ضرایب موجود در معادلات (۱۰ و ۹) به گونه‌ای انتخاب شدند که منجر به معادلات حاکم بر رفتار ویسکوالاستیک خطی (ارائه شده در پیوست الف) گردند.

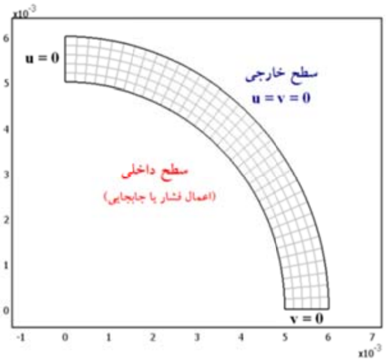
مدل‌سازی

به‌منظور پیاده‌سازی معادلات در جهت مدل‌سازی ویسکوالاستیسیته‌ی خطی، مثالی مهندسی شامل یک لوله‌ی تحت فشار در نظر گرفته می‌شود. این مسأله، نمونه‌ای مناسب از یک هندسه با مرزهای منحنی شکل است که می‌تواند در حالات مختلف مدل شود. شکل شبکه‌بندی شده‌ی لوله و شرایط مرزی اعمالی به آن در شکل (۳) به نمایش در آمده است. به‌علت تقارن مدل، تنها یک‌چهارم لوله مورد تحلیل قرار گرفته است.

در این مسأله فرض می‌شود که لوله از ماده‌ی پلیمری PC/ABS ساخته شده است که در نتیجه دارای رفتار ویسکوالاستیک می‌باشد. بنابراین رفتار چنین ماده‌ای می‌تواند توسط مدل‌های تعمیم یافته‌ی کلوین-وویت و ماکسول (شکل‌های ۱ و ۲) مدل گردد. جزییات مدل‌سازی برای مدل تعمیم یافته‌ی کلوین – وویت در حالت کرنش صفحه‌ای در پیوست ب آمده است. دیگر مدل‌ها نیز با توجه به روش ارائه شده، قابل اجرا کردن در نرم‌افزار می‌باشند.

پس از ایجاد مدل با استفاده از این معادلات، یک تحلیل گذرا بر روی لوله‌ی مورد نظر در مسأله (شکل ۳) انجام شد. در این تحلیل فرض بر آن شد که ماده‌ای که لوله از آن ساخته شده است، دارای الگوی رفتاری مدل تعمیم یافته‌ی کلوین- وویت و مدل تعمیم یافته‌ی

ماکسول باشد. این تحلیل در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای انجام شد و شرایط مرزی و بارگذاری به این گونه بود که سطح خارجی لوله ثابت در نظر گرفته شد و سطح داخلی آن تحت تأثیر دو نوع بارگذاری قرار گرفت. بارگذاری اول شامل اعمال یک تغییر مکان شعاعی ثابت نسبت به زمان و برابر با 0.1 mm بود که شرایط بار گذاری رها شدن تنش را فراهم می‌نمود و بارگذاری دوم عبارت بود از اعمال فشار داخلی ثابتی نسبت به زمان و برابر با 1 MPa که شرایط بارگذاری خزشی را ایجاد می‌کرد.



شکل ۳ هندسه و شرایط مرزی یک چهارم از لوله d مدل شده

تبدیل مدول و نرمی به یکدیگر

معمولاً برای استفاده در یک مدل نرم‌افزار اجزای محدود، نرمی و مدول مواد ویسکوالاستیک را به‌صورت سری پرونی (Prony) بیان می‌کنند. این گونه نحوه‌ی بیان این دو پارامتر نسبت به گونه‌های دیگر ارائه پارامترها همچون مدل Kohlrausch-Williams-Watts (KWW) دارای کاربرد بهتری در مدل‌سازی اجزای محدود می‌یابد [13]. در این صورت نرمی و مدول مرتبط با مدل تعمیم یافته‌ی کلوین- وویت و مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول (شکل‌های ۱ و ۲) به‌صورت زیر می‌باشند:

$$D = D_e + D_1\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)\right] \quad (۱۱)$$

$$+D_2\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right]$$

$$E = E_e + E_1\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) +E_2\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \quad (۱۲)$$

که در آن D نشان دهنده‌ی نرمی و E بیانگر مدول می‌باشد. اندیس‌های ۱ و ۲ که در این روابط به‌کار گرفته شده‌اند، به دو شاخه از دو مدل رئولوژیک (شکل‌های ۱ و ۲) مرتبط می‌باشند.

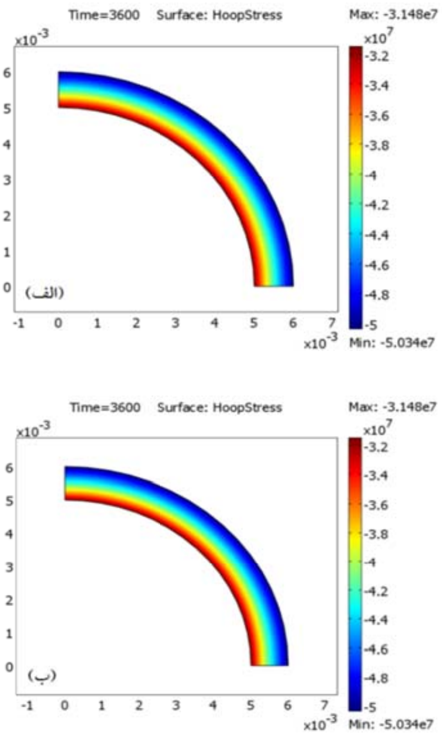
پنج پارامتر در مدول حاصل از مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول (رابطه‌ی ۱۲) وجود دارد که عبارتند از E_e، E_1،E_2، τ_1 و τ_2. این پارامترها را می‌توان از برازش یک منحنی به داده‌های آزمایشگاهی حاصل از تست‌های رهاشدن تنش به‌دست آورد. این کار توسط محققان دیگری در همین زمینه این کار را انجام داده‌اند [14]. به‌عنوان مثال، مدول یک قطعه‌ی آزمایشگاهی در دمای 65°C به‌صورت زیر می‌باشد [14]:

$$E[GPa] = 1.033 +0.851\exp\left(-\frac{t}{3023}\right) +0.273\exp\left(-\frac{t}{260}\right) \quad (۱۳)$$

به‌منظور یافتن مقادیر پنج پارامتر مدل تعمیم‌یافته‌ی کلوین- وویت (D_e، D_1 ، D_2، τ_1 و τ_2) که معادل مدل بالا نیز می‌باشند، یک تحلیل دوبعدی بر روی یک صفحه‌ی مستطیلی و با استفاده از مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول انجام می‌شود. برای شبیه‌سازی بارگذاری خزشی یک تنش تک‌محوری ثابت بر صفحه اعمال می‌گردد. چنانچه مقدار تنش تک‌محوری اعمالی بر صفحه برابر با واحد در نظر گرفته شود، کرنش به‌دست آمده از تحلیل، معادل نرمی ماده خواهد بود. سپس نقاط داده‌های کرنش به معادله‌ی نرمی، معادله‌ی (۱۱)، برازش داده می‌شود تا فرمولی حاصل شود.

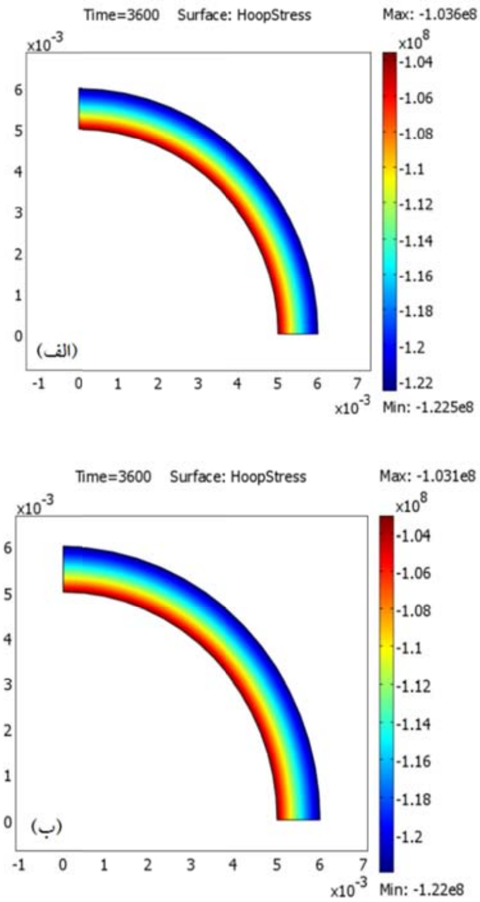
نتایج و بحث بر روی آن‌ها

تحلیل عددی. یک تحلیل گذرا در نرم‌افزار کامسول انجام شد و نتایج حاصل با نتایج به‌دست آمده از تحلیل‌های مشابه ایجاد شده در نرم‌افزارهای دیگر مانند آباکوس مورد مقایسه قرار گرفت. شکل‌های (۵ و ٤) تغییرات تنش محیطی را که از تحلیل‌های رها شدن تنش در لوله برای حالات تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای به‌دست آمده است، نمایش می‌دهند. این تحلیل‌ها در نرم‌افزار کامسول انجام شده است.



شکل ٤ تغییرات تنش محیطی حاصل از تحلیل تنش صفحه‌ای در نرم‌افزار کامسول با استفاده از (الف) مدل تعمیم‌یافته‌ی کلوین- وویت و (ب) مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول

مقایسه‌ی حد بالا و پایین تنش محیطی در شکل‌های (۵ و ٤) در جدول (۱) ارائه شده است و اختلاف مقادیر حاصل از به‌کارگیری هر دو مدل رئولوژیک بر حسب درصد بیان شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، اختلاف این مقادیر ناچیز است (حدود ٪ ۰/۵) و در نتیجه نتایج توزیع تنش محیطی حاصل از به‌کارگیری دو مدل رئولوژیک مختلف در نرم‌افزار کامسول یکسان می‌باشد.



شکل ۵ تغییرات تنش محیطی حاصل از تحلیل کرنش صفحه‌ای در نرم‌افزار کامسول با استفاده از (الف) مدل تعمیم یافته‌ی کلوین- وویت و (ب) مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول

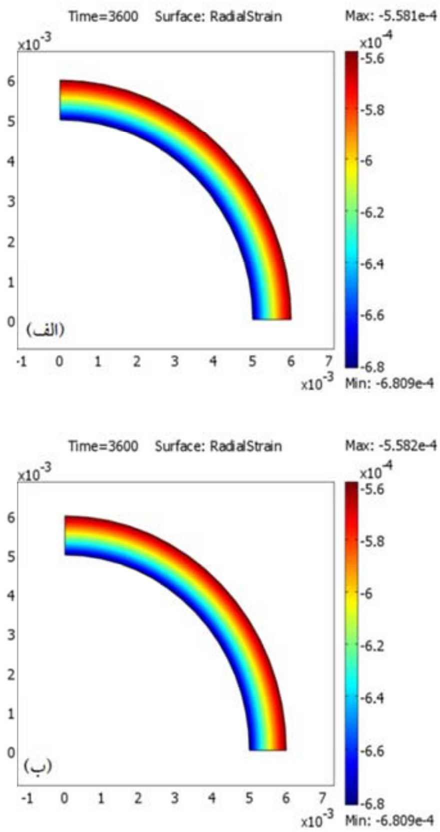
به طریق مشابه، نتایج حاصل از تحلیل‌های خزشی در قالب تغییرات کرنش شعاعی در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای در شکل‌های (۷ و ٦) ارائه شده‌اند. اختلاف حد بالا و پایین کرنش شعاعی نیز در جدول (۲) ارائه شده است. از مقایسه‌ی مقادیر کرنش شعاعی حاصل از به‌کارگیری دو مدل رئولوژیک نیز به این نتیجه می‌رسیم که حداکثر اختلاف در حدود ۰/۲٪ است و بنابراین به‌کارگیری هر دو مدل رئولوژیک در نرم‌افزار کامسول، نتایج یکسانی خواهد داشت.

جدول ۱ مقایسه‌ی مقادیر تنش محیطی بر حسب مگاپاسکال حاصل از تحلیل‌های نرم‌افزار کامسول و آباکوس

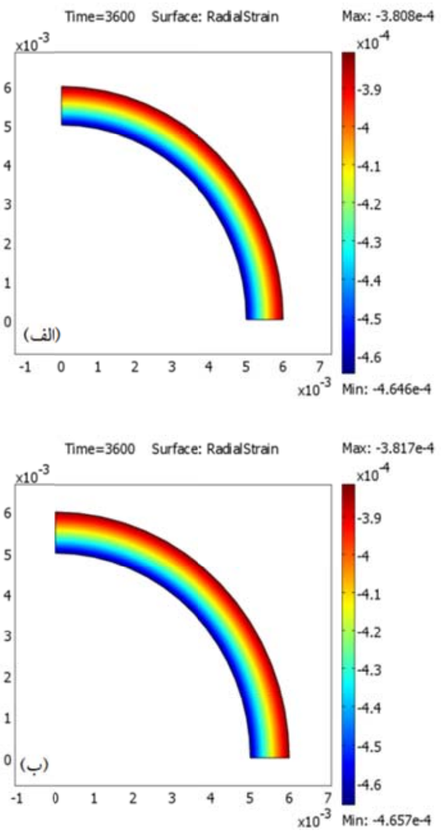
		تنش صفحه‌ای			کرنش صفحه‌ای		
کامسول	حد بالا	K-V*	-31.48	اختلاف: 0.0%	K-V	-103.6	اختلاف: 0.5%
		M**	-31.48		M	-103.1	
	حد پایین	K-V	-50.34	اختلاف: 0.0%	K-V	-122.5	اختلاف: 0.4%
		M	-50.34		M	-122.0	
آباکوس	حد بالا		-31.49	اختلاف با کامسول: 0.0%		-103.1	اختلاف با کامسول: 0.5%
	حد پایین		-50.38	اختلاف با کامسول: 0.1%		-122.0	اختلاف با کامسول: 0.4%

*K-V: Kelvin-Voigt (مدل تعمیم‌یافته‌ی کلوین – وویت)

**M: Maxwell (مدل تعمیم‌یافته‌ی ماکسول)



شکل ٦ تغییرات کرنش شعاعی حاصل از تحلیل تنش صفحه‌ای در نرم‌افزار کامسول با استفاده از (الف) مدل تعمیم‌یافته‌ی کلوین– وویت و (ب) مدل تعمیم‌یافته‌ی ماکسول



شکل ۷ تغییرات کرنش شعاعی حاصل از تحلیل کرنش صفحه‌ای در نرم‌افزار کامسول با استفاده از (الف) مدل تعمیم‌یافته‌ی کلوین– وویت و (ب) مدل تعمیم‌یافته‌ی ماکسول

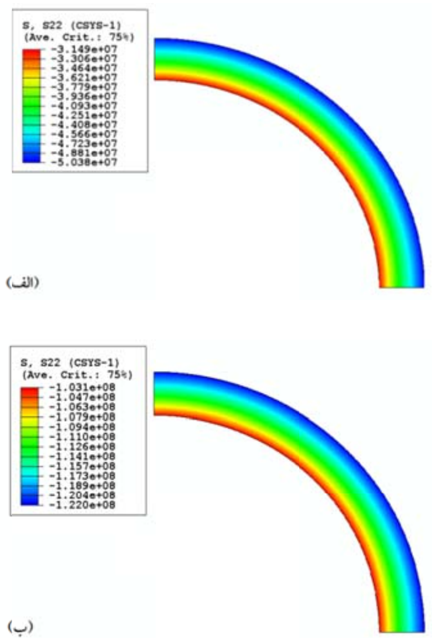
جدول ۲ مقایسه مقادیر کرنش شعاعی حاصل از تحلیل‌های نرم‌افزار کامسول و آباکوس

		تنش صفحه‌ای			کرنش صفحه‌ای		
کامسول	حد بالا	K-V*	-0.5581	اختلاف: 0.02%	K-V	-0.3808	اختلاف: 0.24%
		M**	-0.5582		M	-0.3817	
	حد پایین	K-V	-0.6809	اختلاف: 0.00%	K-V	-0.4646	اختلاف: 0.24%
		M	-0.6809		M	-0.4657	
آباکوس	حد بالا		-0.5579	اختلاف با کامسول: 0.05%		-0.3815	اختلاف با کامسول: 0.18%
	حد پایین		-0.6810	اختلاف با کامسول: 0.01%		-0.4657	اختلاف با کامسول: 0.24%

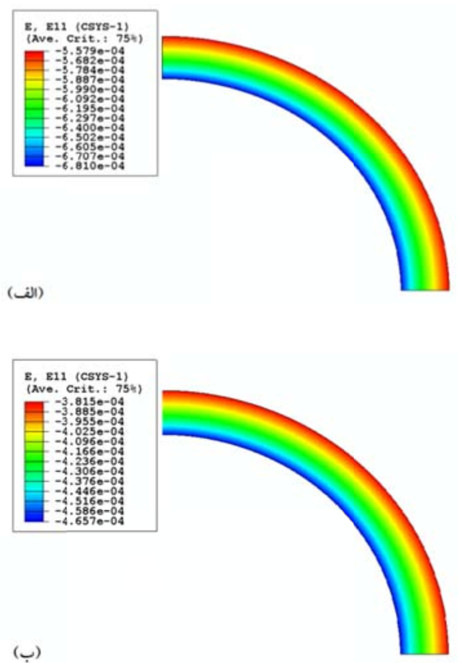
*K-V: Kelvin-Voigt (مدل تعمیم‌یافته‌ی کلوین – وویت)

**M: Maxwell (مدل تعمیم‌یافته‌ی ماکسول)

حاصل از این دو نرم‌افزار در جدول‌های (۲ و ۱) به‌صورت درصد بیان گردیده است که نشان‌دهنده‌ی حداکثر اختلاف ۰/۵% است. از آن‌جایی که مدل ویسکوالاستیسیته در نرم‌افزار آباکوس قبلاً مورد تأیید قرار گرفته است، مقایسه‌ی انجام شده نیز صحت مدل‌سازی با معادلات دیفرانسیل جزیی در نرم‌افزار کامسول را برای رفتار ویسکوالاستیک خطی نشان می‌دهد.



شکل ۸ تغییرات تنش محیطی حاصل از تحلیل (الف) تنش صفحه‌ای و (ب) کرنش صفحه‌ای در نرم‌افزار آباکوس



شکل ۹ تغییرات کرنش شعاعی حاصل از تحلیل (الف) تنش صفحه‌ای و (ب) کرنش صفحه‌ای در نرم‌افزار آباکوس

به‌منظور مقایسه‌ی نتایج حاصل، نتایج به‌دست آمده از تحلیل‌های متناظر در نرم‌افزار اجزای محدود ABAQUS در شکل‌های (۹ و ۸) نشان داده شده‌اند. همان گونه که از شکل‌های (۹-٤) دیده می‌شود، تطابق خیلی خوبی بین نتایج حاصل از تحلیل‌های نرم‌افزار کامسول با نتایج تحلیل‌های متناظر در نرم‌افزار آباکوس وجود دارد. هم‌چنین اختلاف حدود بالا و پایین مقادیر تنش محیطی و کرنش شعاعی

همان‌گونه که در مقدمه نیز آورده شد، مدل ویسکوالاستیک ارائه شده در این پژوهش قابل استفاده در مدل‌سازی فیزیک‌های چندگانه نیز می‌باشد. به‌عنوان مثال، در مسایل شامل فیزیک‌های کوپل مکانیک سازه‌ای و رسانش حرارتی (مانند سازه‌هایی که در آن‌ها مقدار تنش حرارتی قابل توجه است)، معادلات حاکم بر رفتار مکانیک سازه‌ای یک ماده ویسکوالاستیک به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda^e \left[\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^e\right)\right]\underline{\underline{I}} + 2\mu^e\underline{\underline{\varepsilon}}^e - (3\lambda^e + 2\mu^e)(\alpha_T^e\Delta T)\underline{\underline{I}} \qquad (١٤)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{an_i} = \lambda^{an_i} \left[\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{an_i}\right)\right]\underline{\underline{I}} + 2\mu^{an_i}\underline{\underline{\varepsilon}}^{an_i} - (3\lambda^{an_i} + 2\mu^{an_i})(\alpha_T^{an_i}\Delta T)\underline{\underline{I}} \qquad (١٥)$$

با دقت در معادلات (١٥ و ١٤) مشاهده می‌شود که تغییرات دما به‌صورت کرنش حرارتی ($\alpha_T\Delta T$) در این معادلات ظاهر می‌شود. مدل‌سازی این معادله نیز با اصلاح معادلات ویسکوالاستیک ارائه شده در این مقاله قابل انجام است.

تبدیل بین مدول و نرمی. با استفاده از مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول در تحلیل بر روی یک ورق دارای رفتار ویسکوالاستیک، نقاط کرنش به‌دست آمد. سپس با برازش نقاط حاصل بر معادله‌ی نرمی (معادله‌ی ١١)، رابطه‌ای به‌صورت زیر حاصل شد:

$$D\left[\frac{1}{\mathrm{GPa}}\right] = 0.464 + 0.444\left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{5547}\right)\right\} + 0.061\left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{296}\right)\right\} \qquad (١٦)$$

رابطه‌ی بالا می‌تواند برای مدل‌سازی نرمی یک نمونه‌ی پلیمری در دمای ٦٥ °C همراه با به‌کارگیری مدل تعمیم یافته‌ی کلوین- وویت مورد استفاده قرار گیرد. هم‌چنین نرمی حاصل در رابطه‌ی بالا با رابطه‌ای که با مدول طبق رابطه‌ی زیر [15] دارد، مورد تأیید قرار گرفت:

$$\int_0^t E(t)D(t-\tau)d\tau = t \qquad (١٧)$$

مشاهده شد که پارامترهای به‌دست آمده برای نرمی(رابطه ١٦) در معادله‌ی (١٧) صدق می‌کند.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش رفتار ویسکوالاستیک خطی توسط مدل ارائه شده در نرم‌افزار کامسول مدل گردید. در معادلات به‌کار رفته در مدل پیشنهادی، از دو مدل رئولوژیک معروف به نام مدل تعمیم یافته‌ی کلوین-وویت و مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول استفاده شد و معادلات برای دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای ارائه گردید. مدل ارائه شده برای نشان دادن رفتار ماده که از نتایج تست‌های آزمایشگاهی تحت بارگذاری خزشی یا رها شدن تنش به‌دست می‌آید، به‌کار می‌رود. مدل پیشنهادی در این کار پژوهشی هم‌چنین می‌تواند برای به‌دست آوردن مدول یا نرمی یک ماده ویسکوالاستیک در حالی که داده‌های آزمایشگاهی تنها برای یکی از حالات بارگذاری (خزش یا رها شدن تنش) در دسترس است، به‌کار رود. کاربرد مهم دیگر رویکرد ارائه شده در این پژوهش، در تحلیل رفتار ویسکوالاستیک خطی است در مسأله‌ای که فیزیک مکانیک سازه‌ای (که در برگیرنده رفتار ویسکوالاستیک ماده است) با فیزیک‌های چندگانه دیگری نیز کوپل شده باشد. این امکان وجود دارد که معادلات ویسکوالاستیک ارائه شده در این مطالعه را با معادلات حاکم بر فیزیک‌های دیگر ترکیب نمود.

مراجع

1. Gasser, T. C. and Forsell, C., "The Numerical Implementation of Invariant-based Viscoelastic Formulations at Finite Strains. An Anisotropic Model for the Passive Myocardium", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200(49-52), pp. 3637-3645, (2011).
2. COMSOL Multiphysics 4.0a, COMSOL Inc., (2005).
3. Moravec, F. and Letzelter, N., "On the Modeling of the Linear Viscoelastic Behaviour of Biological Materials Using Comsol Multiphysics", *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 1, pp. 175-184, (2007).
4. Marvalova, B., "Application of COMSOL Multiphysics 3.2 to Finite Strain Viscoelasticity of an Elastomeric Solid", *Proceedings of the COMSOL Users Conference*, Prague, October, (2006).
5. Rambert, G., Grandidier, J.-C. and Cangemi, L., "A Modelling of the Coupled Thermodiffuso-Elastic Linear Behaviour. Application to Explosive Decompression of Polymers", *Oil &Gas Science and Technology – Rev. IFP*, Vol. 58(5), pp. 571-591, (2003).
6. Rambert, G. and Grandidier, J.-C., "An Approach to the Coupled Behaviour of Polymers Subjected to a Thermo-Mechanical Loading in a Gaseous Environment", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 24, pp. 151-168, (2005).
7. Rambert, G., Jugla, G. and Grandidier, J.-C., "A Modelling of the Direct Couplings between Heat Transfer, Mass Transport, Chemical Reactions and Mechanical Behaviour. Numerical Implementation to Explosive Decomposition", *Composites: Part A*, Vol. 37, pp. 571-584, (2006).
8. Rambert, G., Grandidier, J.-C. and Aifantis, E.C., "On the Direct Interactions between Heat Transfer, Mass Transport and Chemical Processes within Gradient Elasticity", *European Journal of Mechanics*, A/Solids, Vol. 26(1), pp. 68-87, (2007).
9. Sorvari, J. and Malinen, M., "Numerical Interconversion between Linear Viscoelastic Material Functions with Regularization", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 1291–1303, (2007).
10. Wilkes, J.O., "*Fluid Mechanics for Chemical Engineers with Microfluidics and CFD*", 2nd Edition, Prentice Hall, N. J., (2005).
11. Zimmerman, W.B.J., "*Multiphysics Modelling with Finite Element Methods*", World Scientific Pub., London, Hackensack, N.J., (2006).
12. COMSOL Multiphysics User's Guide, COMSOL Multiphysics 4.0a Documentation, (2010).
13. Taylor, R.L., Pister, K.S. and Goudreau, G.L., "Thermomechanical Analysis of Viscoelastic Solids", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2(1), pp. 45-59, (1970).
14. Haghighi-Yazdi, M. and Lee-Sullivan, P., "Stress Relaxation of a Polycarbonate Blend after Hygrothermal Aging", *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 17, pp. 171-193, (2013).
15. Guo, Y. and Bradshaw, R.D., "Isothermal Physical Aging Characterization of Polyether-Ether-Ketone (PEEK) and Polyphenylene Sulfide (PPS) Films by Creep and Stress", *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 11(1), pp. 61-89, (2007).

پیوست الف

مدل تعمیم یافته‌ی کلوین- وویت

$$\begin{cases}\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^{an_1} + \varepsilon_z^{an_2}\\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\end{cases}$$ (الف-۱)

$$\begin{cases}\varepsilon_x^e = \varepsilon_x - \varepsilon_x^{an_1} - \varepsilon_x^{an_2}\\ \varepsilon_y^e = \varepsilon_y - \varepsilon_y^{an_1} - \varepsilon_y^{an_2}\\ \begin{cases}\varepsilon_z^e = \dfrac{\frac{2}{3}G - K}{\frac{4}{3}G + K}\left(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e\right), \text{تنش صفحه ای}\\ \varepsilon_z^e = 0 \quad , \text{کرنش صفحه ای}\end{cases}\\ \varepsilon_{xy}^e = \varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^{an_1} - \varepsilon_{xy}^{an_2}\end{cases}$$ (الف- ۲)

$$\begin{cases}e_x^e = \varepsilon_x^e - \dfrac{\varepsilon_{vol}^e}{3}\\ e_y^e = \varepsilon_y^e - \dfrac{\varepsilon_{vol}^e}{3}\\ e_z^e = \varepsilon_z^e - \dfrac{\varepsilon_{vol}^e}{3}\\ \varepsilon_{vol}^e = \varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e\end{cases}$$ (الف- ۳)

$$\begin{cases}\sigma_x = 2Ge_x^e + K\varepsilon_{vol}^e\\ \sigma_y = 2Ge_y^e + K\varepsilon_{vol}^e\\ \sigma_z = 2Ge_z^e + K\varepsilon_{vol}^e\\ \sigma_{xy} = 2Ge_{xy}^e\end{cases}$$ (الف- ۴)

$$\begin{cases}\sigma_x^{an_i} = \left(\dfrac{4}{3}G_i + K_i\right)\varepsilon_x^{an_i} + \left(K_i - \dfrac{2}{3}G_i\right)(\varepsilon_y^{an_i} + \varepsilon_z^{an_i})\\ \sigma_y^{an_i} = \left(\dfrac{4}{3}G_i + K_i\right)\varepsilon_y^{an_i} + \left(K_i - \dfrac{2}{3}G_i\right)(\varepsilon_x^{an_i} + \varepsilon_z^{an_i})\\ \sigma_z^{an_i} = \left(\dfrac{4}{3}G_i + K_i\right)\varepsilon_z^{an_i} + \left(K_i - \dfrac{2}{3}G_i\right)(\varepsilon_x^{an_i} + \varepsilon_y^{an_i})\\ \sigma_{xy}^{an_i} = 2G_i\varepsilon_{xy}^{an_i}, i = 1,2 \left(\text{بدون قرارداد جمع}\right)\end{cases}$$ (الف- ۵)

$$\begin{cases}\sigma_x^{v_i} = \dfrac{\eta_i}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\dot{\varepsilon}_x^{an_i} + \nu\left(\dot{\varepsilon}_y^{an_i} + \dot{\varepsilon}_z^{an_i}\right)\right]\\ \sigma_y^{v_i} = \dfrac{\eta_i}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\dot{\varepsilon}_y^{an_i} + \nu\left(\dot{\varepsilon}_x^{an_i} + \dot{\varepsilon}_z^{an_i}\right)\right]\\ \sigma_z^{v_i} = \dfrac{\eta_i}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\dot{\varepsilon}_z^{an_i} + \nu\left(\dot{\varepsilon}_x^{an_i} + \dot{\varepsilon}_y^{an_i}\right)\right]\\ \sigma_{xy}^{v_i} = 2G_i\tau_i\dot{\varepsilon}_{xy}^{v_i} \quad , \quad i = 1,2 \;(\text{بدون قرارداد جمع})\end{cases}$$ (الف- ۶)

مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} \\ \begin{cases} \varepsilon_z = \dfrac{-\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \sigma_{qz}}{\lambda + 2G}, \text{تنش صفحه ای} \\ \varepsilon_z = 0 \quad , \quad \text{کرنش صفحه ای} \end{cases} \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}) \end{cases}$$ (الف- ۷)

$$\begin{cases} e_x = \varepsilon_x - \dfrac{\varepsilon_{vol}}{3} \\ e_y = \varepsilon_y - \dfrac{\varepsilon_{vol}}{3} \\ e_z = \varepsilon_z - \dfrac{\varepsilon_{vol}}{3} \\ \varepsilon_{vol} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \end{cases}$$ (الف- ۸)

$$\begin{cases} \sigma_x = 2Ge_x + K\varepsilon_{vol} + \sigma_{qx} \\ \sigma_y = 2Ge_y + K\varepsilon_{vol} + \sigma_{qy} \\ \sigma_z = 2Ge_z + K\varepsilon_{vol} + \sigma_{qz} \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} + \sigma_{qxy} \end{cases}$$ (الف- ۹)

$$\begin{cases} q^e_{x_i} = q_{x_i} - \dfrac{q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}}{3} \\ q^e_{y_i} = q_{y_i} - \dfrac{q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}}{3} \\ q^e_{z_i} = q_{z_i} - \dfrac{q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}}{3} \\ i = 1,2 \ (\text{بدون قرارداد جمع}) \end{cases}$$ (الف- ۱۰)

$$\begin{cases} \sigma_{q_x} = 2G_i q^e_{x_i} + K_i(q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}) \\ \sigma_{q_y} = 2G_i q^e_{y_i} + K_i(q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}) \\ \sigma_{q_z} = 2G_i q^e_{z_i} + K_i(q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}) \\ \sigma_{q_{xy}} = 2G_i q^e_{xy_i}, i = 1,2 \ (\text{با قرارداد جمع}) \end{cases}$$ (الف- ۱۱)

$$\begin{cases} \dot{q}_{x_i} + \dfrac{1}{\tau_i} q_{x_i} = \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{q}_{y_i} + \dfrac{1}{\tau_i} q_{y_i} = \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{q}_{z_i} + \dfrac{1}{\tau_i} q_{z_i} = \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{q}_{xy_i} + \dfrac{1}{\tau_i} q_{xy_i} = \dot{\varepsilon}_{xy} \\ i = 1,2 \ (\text{بدون قرارداد جمع}) \end{cases}$$ (الف- ۱۲)

پیوست ب

جزئیات مدل‌سازی با استفاده از مدل تعمیم یافته‌ی کلوین – وویت در حالت کرنش صفحه‌ای

مدل تعمیم یافته کلوین– وویت در نظر گرفته شده در این پژوهش، دارای یک فنر خطی و دو المان کلوین– وویت می‌باشد که به‌صورت سری به هم متصل شده‌اند (شکل ۱). بنابراین، تنش کلی مدل برابر با تنش فنر خطی و هم‌چنین تنش در هرکدام از المان‌های کلوین– وویت (معادله‌ی ٤)، و کرنش کلی مدل برابر با مجموع کرنش‌های فنر خطی و دو المان کلوین– وویت (معادله‌ی ۱) می‌باشد. به‌منظور مدل‌سازی مدل تعمیم یافته در نرم‌افزار، یک فرم عمومی معادلات دیفرانسیل جزئی برای مدل کردن تنش– کرنش کلی مدل در نظر گرفته شد و برای هر کدام از المان‌های کلوین– وویت از فرم ضریبی معادلات دیفرانسیل جزئی بهره گرفته شد.

فرم عمومی معادلات دیفرانسیل جزئی

با توجه به معادله‌ی فرم عمومی معادلات دیفرانسیل جزیی (معادله‌ی ۱۰) متغیر وابسته برابر با جابه‌جایی‌های کلی مدل؛ یعنی u و v، قرار داده شد و ضرایب معادله به‌صورت زیر تعریف شد:

$$e_a = d_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(ب–۱)}$$

$$F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(ب–۲)}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -\sigma_x & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & -\sigma_y \end{bmatrix} \qquad \text{(ب– ۳)}$$

اگر این ضرایب در معادله‌ی (۱۰) قرار داده شود، دستگاه معادلات تعادل جسم در حالت صفحه‌ای حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ -\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \text{(ب–٤)}$$

که در آن σ_x، σ_y و σ_{xy} برابر با تنش‌های متناظر در فنر خطی مدل تعمیم یافته (با مدول برشی G) قرار داده می‌شود:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x^e + (K - \frac{2}{3}G)(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y^e + (K - \frac{2}{3}G)(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z^e + (K - \frac{2}{3}G)(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}^e \end{cases} \qquad \text{(ب–۵)}$$

که در آن ε_x^e، ε_y^e، ε_z^e و ε_{xy}^e کرنش‌های فنر خطی در مدل تعمیم یافته می‌باشند که توسط روابط (الف–۲) به کرنش کلی (ε) و کرنش‌های دو المان کلوین– وویت (ε^{an1} و ε^{an2}) مرتبط می‌شوند.

فرم ضریبی معادلات دیفرانسیل جزئی

برای هر کدام از المان‌های کلوین- وویت در مدل تعمیم یافته، یک فرم ضریبی معادلات دیفرانسیل جزئی ایجاد شد که در آن متغیرهای وابسته، کرنش در این المان‌ها؛ یعنی ε_x^{ani}، ε_y^{ani}، ε_z^{ani} و ε_{xy}^{ani} (i=1,2)، در نظر گرفته می‌شود. ضرایب فرم ضریبی PDE در معادله‌ی (۹) نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$e_a\,, c\,, \alpha\,, \gamma, \beta = 0 \qquad (\text{ب}-٦)$$

$$d_a = \begin{bmatrix} \tau_i(2G_i)(1+\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_i(2G_i)(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_i(2G_i)(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_i(2G_i) \end{bmatrix} \qquad (\text{ب}-٧)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 2G_i(1+\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2G_i(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2G_i(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_i \end{bmatrix} \qquad (\text{ب}-٨)$$

$$f = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (\text{ب}-٩)$$

بنابراین با تعریف پارامترهای معادلات (الف- ۱ تا ٤) و استفاده از متغیرهای کرنش فنر خطی (ε^e) و کرنش‌های دو المان کلوین- وویت (ε^{ani}) در معادلات دیفرانسیل جزئی، این دو فرم عمومی و ضریبی معادلات به هم مرتبط می‌شوند و در مجموع مدل تعمیم یافته‌ی کلوین- وویت ساخته می‌شود.